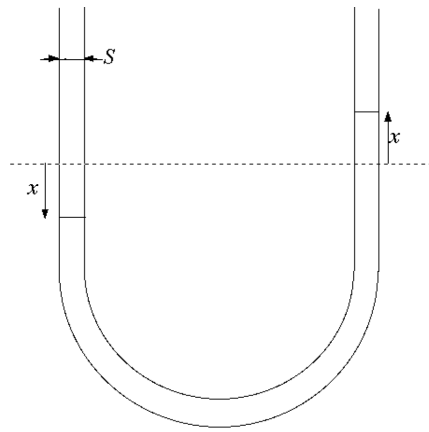
Oscillations d'un liquide dans un tube en U.

Dans un tube en U de section constante S, on verse un volume $V = S\,L$ de liquide (L est donc la longueur de la partie du tube contenant le liquide). Au repos, théorie des vases communicants oblige, le liquide est au même niveau dans les deux branches ; ce niveau sera pris comme origine des altitudes. On provoque des oscillations de sorte que le niveau s'élève algébriquement de $x(t)$ dans la branche droite et donc s'abaisse de la même quantité dans la branche gauche. On néglige pour l'instant les phénomènes dissipatifs, c'est à dire la viscosité. On note ρ la mase volumique du liquide.



Question 1 :
Trouver par une méthode énergétique la période du phénomène.

L'incompressibilité du liquide fait qu'une portion donnée du tube contient une masse constante, donc que le débit massique est le même aux deux extrémités de cette portion. Le débit massique est donc uniforme, le débit volumique aussi puisqu'il s'agit d'un liquide incompressible et puisque la section est constante, il en est donc de même pour la vitesse. Comme la vitesse du niveau du fluide à droite est $\dot{x}$, la vitesse du fluide est partout $\dot{x}$.

L'énergie cinétique se calcule donc simplement :

$$\mathcal{E}_{cin} = \iiint \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v^2 = \iiint \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\,\dot{x}^2 \iiint \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\,\rho\,V\,\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\,\rho\,L\,S\,\dot{x}^2$$

En appelant $\mathcal{E}_0$ l'énergie potentielle à l'équilibre, on obtient l'énergie potentielle dans la position repérée par la donnée de x en lui retranchant l'énergie $\mathcal{E}_1$ d'une longueur x de fluide à gauche et en lui ajoutant l'énergie $\mathcal{E}_2$ d'une longueur x de fluide à droite. $\mathcal{E}_2$ est de la forme $\mathcal{E}_2 = m_2\,g\,z_2$ où m_2 est la masse de cette longueur x, soit $m_2 = \rho\,S\,x$ et z_2 l'altitude *du centre de gravité* de cette longueur, soit $z_2 = x/2$. Donc $\mathcal{E}_2 = (1/2)\,\rho\,g\,S\,x^2$ et de même $\mathcal{E}_1 = -(1/2)\,\rho\,g\,S\,x^2$, d'où :

$$\mathcal{E}_{pot} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 - (-\frac{1}{2}\,\rho\,g\,S\,x^2) + \frac{1}{2}\,\rho\,g\,S\,x^2 = \mathcal{E}_0 + \rho\,g\,S\,x^2$$

La dérivée de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces autres que la pesanteur. Par hypothèse les forces intérieures ont une puissance nulle. N'oublions pas de parler des forces de pression : au niveau des surfaces libres à gauche et à droite, les forces de pression ont même module $p_{atm}\,S$ et même sens (vers le bas) tandis que les vitesses sont opposées ($\dot{x}$ respectivement vers le haut et le bas), le bilan est donc nul ; il y a donc conservation de l'énergie mécanique. D'où :

$$\mathcal{E}_{meca} = \frac{1}{2}\,\rho\,L\,S\,\dot{x}^2 + \mathcal{E}_0 + \rho\,g\,S\,x^2 = Cte$$

Dérivons par rapport au temps :

$$0 = \rho\,L\,S\,\dot{x}\,\ddot{x} + 2\,\rho\,g\,S\,x\,\dot{x}$$

Après simplification par $\dot{x}$, ρ et S, on tire :

$$\ddot{x} = -\frac{2\,g}{L}\,x$$

d'où une évolution sinusoïdale de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{2\,g}{L}}$ et de période $T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{L}{2\,g}}$

Question 2 :
Retrouver ce résultat en adaptant la démonstration du théorème de Bernoulli

On part de l'équation d'Euler et l'on tient compte que $\overrightarrow{g}$ dérive d'un potentiel et que ρ est uniforme :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p = \overrightarrow{\text{grad}}\,(-\,g\,z) - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Multiplions scalairement par $\overrightarrow{\text{d}\ell}$ parallèle à une ligne de courant, donc à $\overrightarrow{v}$; on tient compte que pour un champ scalaire X, à un instant donné (de sorte que le terme $\dfrac{\partial X}{\partial t}\,\text{d}t$ n'existe pas), on a $\overrightarrow{\text{grad}}\,p\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} = \text{d}X$ et que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{d}\ell} = 0$ car $\overrightarrow{\text{d}\ell}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles.

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right)\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} + \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} = 0$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} + \text{d}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

Intégrons entre deux points A et B sur une même ligne de courant :

$$\int_A^B \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} + \int_A^B \text{d}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

$$\int_A^B \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} + \left[\frac{v^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right]_A^B = 0$$

Choisissons A et B à la surface libre du liquide, à gauche et à droite, on a :

$$v_A = v_B = \dot{x} \qquad p_A = p_B = p_{atm} \qquad z_A = x \qquad z_B = -x$$

d'où

$$\int_A^B \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} + 2\,g\,x = 0$$

En tout point de la ligne de courant, introduisons le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ qui lui est tangent, on a vu plus haut que $\overrightarrow{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u}$ donc $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u}$ et, bien sûr, $\overrightarrow{\text{d}\ell} = \text{d}\ell\,\overrightarrow{u}$ donc

$$\int_A^B \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} = \int_A^B \ddot{x}\,\text{d}\ell = \ddot{x}\int_A^B \text{d}\ell = \ddot{x}\,L$$

que l'on reporte dans l'équation précédente :

$$\ddot{x}\,L + 2\,g\,x = 0$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode énergétique.

Question 3 :
Par raisonnement physique, validé par analyse dimensionnelle, donner une expression plausible à la puissance des forces de viscosité.

Une puissance volumique est le produit d'une force volumique par une vitesse. La force volumique est en $\eta\Delta v$ de l'ordre de $\eta\, v/R^2$ où R est une longueur caractéristique de variation de la vitesse (donc le rayon du tube car c'est radialement que la vitesse varie de façon significative, intuitivement maximale sur l'axe et nulle au contact de la paroi) donc la puissance volumique est en $\eta\, v^2/R^2$. Or le volume est $V = L\,S \sim L\,R^2$ (on laisse tomber le π, car on raisonne à une constante non dimensionnée près). D'où une puissance, négative car la viscosité dissipe de l'énergie, en $-\eta\, v^2/R^2 \cdot L\,R^2 = -\eta\, v^2\, L$; on notera

$$\mathcal{P}_{visco} = -\alpha\,\eta\,L\,v^2$$

Vérifions par analyse dimensionnelle :

$P = F\,V = M\,L\,T^{-2} \cdot L\,T^{-1} = M\,L^2\,T^{-3}$

$V^2 = (L\,T^{-1})^2 = L^2\,T^{-2}$

$L = \cdots L\,!$

Pour η pensons à une formule simple, par exemple $F = 6\,\pi\,\eta\,R\,V$, d'où

$\eta = F/(R\,V) = M\,L\,T^{-2}/(L \cdot L\,T^{-1}) = M\,L^{-1}\,T^{-1}$

On calcule $\eta\,L\,V^2 = M\,L^{-1}\,T^{-1} \cdot L \cdot L^2\,T^{-2} = M\,L^2\,T^{-3} = \cdots P$

Donc tout va bien.

Question 4 :
Que devient l'équation des oscillations lorsqu'on tient compte de la viscosité ?

Il suffit d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique en reprenant le résultat de la première question, sans oublier que $v = \dot{x}$.

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{meca}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{visco}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,\rho\,L\,S\,\dot{x}^2 + \mathcal{E}_0 + \rho\,g\,S\,x^2\right) = \rho\,L\,S\,\dot{x}\,\ddot{x} + 2\,\rho\,g\,S\,x\,\dot{x} = -\alpha\,\eta\,L\,\dot{x}^2$$

d'où, après simplification par $\dot{x}$;

$$\rho\,L\,S\,\ddot{x} + \alpha\,\eta\,L\,\dot{x} + 2\,\rho\,g\,S\,x = 0$$

On tombe sur une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants ; la suite relève donc de la routine et de l'application numérique.

On appronfondira cette étude lors d'un prochain exercice corrigé sur l'écoulement de Poiseuille.

Il ne sera pas trop difficile de montrer que $\alpha = 8\,\pi$, mais il faudra aussi revisiter le calcul de l'énergie cinétique.